

Übungsblatt 7

5.2.2014, Abgabe: 12.2.2014

7.1) Bewegung im Gravitationsfeld (12 Punkte)

Man diskutiere mögliche Bewegungen von Körpern der Masse m im Gravitationsfeld eines Sterns der Masse m_s im Vergleich zwischen Newton und Einstein. Durch Ausnutzung der Symmetrien des Problems lässt sich die Bewegung in beiden Fällen auf ein eindimensionales Problem reduzieren. Bei Newton findet man für die Bahnkurve, parametrisiert durch Abstand r und Winkel φ ,

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{l} \sqrt{2m(\epsilon - V_{\text{eff}}(r))}, \quad (1)$$

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{G_N m m_s}{r} + \frac{l^2}{2mr}, \quad (2)$$

wobei $\epsilon = E$ die erhaltene Energie des Körpers ist.

In Einsteins Fall lässt sich die Bahnkurve auf dieselbe Form bringen, wie lauten nun $\epsilon, V_{\text{eff}}(r)$? Skizzieren Sie die Potenziale qualitativ für verschiedene Werte von l und diskutieren Sie die möglichen Bewegungen. Wann gibt es kreisförmige Orbits? Sind diese stabil oder instabil gegen kleine Störungen? Was ist der kleinste Radius für eine stabile Kreisbewegung?

7.2) Rotverschiebung (8 Punkte)

Man betrachte die Rotverschiebung von Licht in der Schwarzschild-Metrik. Eine Lichtquelle, die am Ort P_1 ruht, emittiert Licht mit der Kreisfrequenz ω_1 , ein Beobachter, der am Ort P_2 ruht, empfängt Licht der Frequenz ω_2 . Wie ist für $r_1 < r_2$ das Verhältnis der Frequenzen ν_1/ν_2 ? Was geschieht mit Licht, das knapp außerhalb des Schwarzschildradius eines schwarzen Loches emittiert wird?