Übungsblatt 6

17.1.2014, Abgabe: 24.1.2014

6.1) Kugeloberfläche *(5 Punkte)*

Berechnen Sie für die auf dem letzten Übungsblatt verwendete Kugeloberfläche zusätzlich die Komponenten des Ricci-Tensors und den Krümmungsskalar.

6.2) Koordinatentransformation und Lorentz-Eichung *(7 Punkte)*

Man finde die konkreten Bedingungen an die Koordinatentransformation, die die linearisierten Einsteingleichungen in beliebigen Koordinaten in ihre Form in der Lorentz-Eichung überführt, $\Box h_{\mu\nu} = 2\varkappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T)$. (Dabei ist $\Box \equiv -\partial_\sigma \partial^\sigma$.)

6.3) Geodätengleichungen und Schwarzschild-Metrik *(8 Punkte)*

Die Geodätengleichungen können auch als Extremalengleichungen betrachtet werden, die den Euler-Lagrange-Gleichungen,

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}, \qquad L = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \ , \tag{1}$$

entsprechen ($\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\tau$). Wie lautet L für die Schwarzschild-Metrik mit $\theta = \pi/2$? Falls eine allgemeine Lagrangefunktion $L(q, \dot{q})$ explizit nicht von einer Koordinate abhängt, dann ist diese Koordinate eine Erhaltungsgröße,

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{2}$$

Man identifiziere die entsprechenden Koordinaten bzw. Erhaltungsgrößen und interpretiere sie. Man beachte, dass außerdem $L = 1$ ist (warum?) und zeige, dass diese Gleichung im Limes eines flachen Raums in die speziell relativistische Energie-Impuls-Beziehung übergeht.