Übungsblatt 5

6.12.2013, Abgabe: 13.12.2013

5.1) Christoffelsymbole und kovariante Ableitung ***(7 Punkte)***
Zeigen Sie, dass die Christoffelsymbole die Gleichung ($g = \det g_{\mu\nu}$)

$$\Gamma^{\mu}{}_{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\lambda \sqrt{|g|}$$

erfüllen, und daraus für die kovariante Divergenz eines Vektors

$$D_\mu V^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(\sqrt{|g|} V^\mu \right)$$

folgt. Hinweis: Man benutze $\mathrm{Tr}\,[M^{-1}(x)\partial_\mu M(x)] = \partial_\mu \ln \det M(x)$, was für eine invertierbare Matrix $M(x)$ gilt. (Beweis ?)

5.2) Riemannscher Krümmungstensor ***(8 Punkte)***
a) Zeigen Sie folgende Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\mu\nu\lambda\rho} \\ &R_{\mu\nu\rho\lambda} = -R_{\nu\mu\rho\lambda} \\ &R_{\mu\nu\rho\lambda} = R_{\rho\lambda\mu\nu} \\ &\text{ und } R_{\mu\nu\rho\lambda} + R_{\mu\rho\lambda\nu} + R_{\mu\lambda\nu\rho} = 0 \,. \end{aligned}$$

Hinweis: Man betrachte den Tensor in einem geeigneten Koordinatensystem und argumentiere dann, weshalb dies auch für beliebige Koordinaten gilt.
b) Wie viele unabhängige Komponenten hat der Tensor in d Dimensionen?

5.3) Krümmungseigenschaften einer Kugeloberfläche ***(5 Punkte)***
Man betrachte die zweidimensionale Kugeloberfläche als Beispiel für einen gekrümmten Raum (Koordinaten Längengerade θ, Breitengerade ϕ). Leiten Sie den metrischen Tensor und die Christoffelsymbole für diese Fläche her. Formulieren Sie die Geodätengleichung und berechnen Sie die Komponenten des Krümmungstensors.