Übungsblatt 4

22.11.2013, Abgabe: 29.11.2013

4.1) Christoffelsymbole *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die Metrik (Abstandsquadrat ds^2) und die Christoffelsymbole für die zweidimensionale Ebene in Polarkoordinaten (${\Gamma^i}_{jk}$ für $i, j, k \in \{r, \phi\}$).

4.2) Definition von räumlichen Abstand in der ART *(10 Punkte)*
Einstein schlug folgende Definition für den räumlichen Abstand dl zwischen zwei Punkten A, B mit Koordinatendifferenz dx^i vor: Ein Lichtsignal wird von A nach B geschickt und dort zurück reflektiert. Die in A gemessene Zeit bis zur Rückkehr ist $d\tau_A$. Daraus ergibt sich ein Abstand von $dl = cd\tau_A/2$. Dieses infinitesimale Abstandsquadrat ist quadratisch in den Koordinatendifferenzen und definiert die räumliche Metrik

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j \ .$$

Welche Beziehung gilt für die Koordinatendifferenzen der beiden Lichtstrahlen? Leiten Sie folgenden Zusammenhang zwischen dieser räumlichen Metrik (γ_{ij}) und der Raum-Zeit-Metrik $g_{\mu\nu}$ ($ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$) her

$$\gamma_{ij} = -g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \ .$$

Welche Schwierigkeit ergibt sich für die Berechnung eines Abstands zwischen zwei Punkten mit einer beliebigen Metrik $g_{\mu\nu}(x)$?

4.3) Rotierender Zylinder *(5 Punkte)*
Wenden Sie das Ergebnis auf den rotierenden Zylinder (Winkelgeschwindigkeit ω) an. Leiten Sie dazu zunächst die Metrik in einem rotierenden Bezugssystem in geeigneten Koordinaten her. Welche Einschränkung ergibt sich aus $g_{00} > 0$? Geben Sie die räumliche Metrik γ_{ij} für einen mitrotierenden Beobachter an. Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis?