Übungsblatt 3

8.11.2013, Abgabe: 15.11.2013

3.1) Tensor Eigenschaften ***(2 Punkte)***

Zeigen Sie, dass durch Kontraktion von zwei Indizes (d. h. Summation wie z. B. $T^{\alpha\beta}_{\beta}$) aus einem Tensor wieder ein Tensor (niedrigerer Stufe) hervorgeht.

3.2) Kovariante Formulierung der Elektrodynamik ***(8 Punkte)***

a) Bestimmen Sie das Transformationsverhalten der elektrischen und magnetischen Feldstärke ($\vec{E}$ und $\vec{B}$) unter Lorentzboosts entlang der x-Achse. Verwenden Sie den in der Vorlesung behandelten Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$.

b) Leiten Sie aus der Bewegungsgleichung für die Lorentz-Kraft

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

die Bewegungsgleichung der dreidimensionalen Vektoren,

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \ ,$$

her. Hierbei sind q die Ladung eines Teilchens und u_μ die Vierergeschwindigkeit. Wie lautet die Zeitkomponente der Gleichung?

c) Was sind die Lösungen der homogenen Maxwell-Gleichung in Lorenz-Eichung $\Box A^\mu = 0$?

3.3 Drehimpuls und Spin ***(6 Punkte)***

Zeigen Sie, dass sich der Drehimpulstensor $J^{\alpha\beta}$ unter Translationen $x'^\alpha = x^\alpha + a^\alpha$ wie

$$J'^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta} + a^\alpha p^\beta - a^\beta p^\alpha$$

verhält. Der interne Drehimpuls (Spin) ist definiert durch

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}J^{\beta\gamma}u^\delta \ .$$

Zeigen Sie, dass dieser unter Translationen invariant ist, und dass für ein freies Teilchen $\frac{dS_\alpha}{dt} = 0$ gilt.

3.4) Levi-Civita Tensor ***(4 Punkte)***

Zeigen Sie, dass der vollständig antisymmetrische Tensor $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($= 1$, für gerade Permutationen von 0123; $= -1$ für ungerade Permutationen von 0123; $= 0$ sonst) in allen Inertialsystemen gleich ist. Wenden Sie dazu die Lorentz-Transformationen auf diesen Tensor an.