

Übungsblatt 2

25.10.2013, Abgabe: 1.11.2013

2.1) Kräftefreies Teilchen (7 Punkte)

Man betrachte die Newtonsche Mechanik in einem d -dimensionalen Raum mit der Metrik $g_{ij}(x), i = 1, \dots, d$. Benutzen Sie die Lagrangefunktion eines kräftefreien Teilchens, um dessen Bewegungsgleichungen herzuleiten. Interpretieren Sie das Ergebnis. Welche Trajektorien haben Inertialsysteme in einem Raumzeitdiagramm des Minkowski-Raums?

2.2) Lorentz-Kontraktion (3 Punkte)

Ein Garagist und ein Rennfahrer besitzen je eine Garage und ein Auto gleicher Länge: wenn das Auto in der Garage geparkt ist, lassen sich deren vorderes und hinteres Tor gerade eben schließen. Die beiden schließen eine Wette ab. Der Rennfahrer soll mit einem großen Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit in die Garage rasen, deren Einfahrtstor offen und deren Ausfahrtstor geschlossen ist. Zum dem Zeitpunkt, an dem das Heck das Eingangstor passiert, schließt der Garagist das Einfahrtstor und öffnet das Ausfahrtstor (mit Reaktionszeit Null, öffnen und schließen geht instantan). Der Garagist wettet, dass das Experiment gutgeht, da das Auto Lorentz-kontrahiert wird und daher besser in die Garage passt als in Ruhe. Der Rennfahrer wettet dagegen, dass er das Ausfahrtstor zertrümmern wird, da aus seiner Sicht die Garage Lorentz-kontrahiert wird und das Auto daher nicht mehr in die Garage passt. Wer gewinnt? Argumentieren Sie mithilfe eines Raum-Zeitdiagramms.

2.3 Tensoren (4 Punkte)

Beweisen Sie für allgemeine Koordinatentransformationen:

a) Wenn $R^{\alpha\beta}$ und $S^{\alpha\beta}$ Tensoren sind, dann ist auch die Linearkombination

$T^{\alpha\beta} = aR^{\alpha\beta} + bS^{\alpha\beta}$ ein Tensor.

b) Wenn S^α und $R^{\alpha\beta}$ Tensoren erster und zweiter Stufe sind, dann ist das direkte Produkt (z. B. $T^{\alpha\beta\gamma} = R^{\alpha\beta}S^\gamma$) ein Tensor dritter Stufe.

2.4 Zwillingenparadoxon (6 Punkte)

Von den Zwillingen A und B geht A auf eine lange Reise in einem Raumschiff, das sich mit einem signifikanten Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit bewegt. Eines Tages kommt A zurück. Da seine Eigenzeit aufgrund der Bewegung langsamer verging als die seines Bruders, ist er nun jünger als B. Kommt man zum umgekehrten Schluss, wenn man stattdessen das System von A als Ruhesystem wählt? Lösen Sie das Problem mit einem Raumzeitdiagramm und diskutieren Sie die in beiden Systemen vergangenen Zeitintervalle. Approximieren Sie die Reise hierzu durch zwei gleichförmige Bewegungen für die Hin- und Rückreise.