Übungsblatt 1

18.10.2013, Abgabe: 23.10.2013

1.1) Transformation der Metrik *(6 Punkte)*

Finden Sie jeweils eine explizite Transformation, die eine allgemeine 2d Metrik an einem Punkt in eine euklidische Metrik, $g_{ij} = \delta_{ij}$, bzw. in eine pseudo-euklidische Metrik, $g_{ij} = \eta_{ij}$ mit $\eta_{ij} = \mathrm{diag}(1, -1)$, überführt. Dabei soll die Länge erhalten bleiben.

1.2) Volumen *(8 Punkte)*

Der allgemeine Ausdruck für ein differenzielles Volumenelement ist das Produkt der Koordinatendifferenziale und der Wurzel der Determinante des metrischen Tensors,

$$dV = \sqrt{\det g} \prod_i dx^i \,.$$

a) Überzeugen Sie sich davon, dass sich dies für einen 3d flachen Raum auf die bekannten Volumenelemente in kartesischen und Kugelkoordinaten reduziert.

b) Berechnen Sie das Volumen einer 3-Kugeloberfläche. Ähnlich der 2d Kugeloberfläche hat diese keine Ränder und dennoch ein endliches Volumen. In der Kosmologie beschreibt die 3-Kugel ein sogenanntes geschlossenes Universum.

1.3) Krümmung *(6 Punkte)*

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung auf einer Kugeloberfläche und auf einem Zylinder mithilfe der intrinsischer Größen (Metrik). Hinweis: Die Gauß-Krümmung ist gegeben als

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2) \;=\; & \frac{1}{2g}\left[2\partial_1\partial_2 g_{12} - \partial_2^2 g_{11} - \partial_1^2 g_{22}\right] \\ & -\frac{g_{22}}{4g^2}\left[(\partial_1 g_{11})\,(2\partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22}) - (\partial_2 g_{11})^2\right] \\ & +\frac{g_{12}}{4g^2}\left[(\partial_1 g_{11})(\partial_2 g_{22}) - 2(\partial_2 g_{11})(\partial_1 g_{22}) + (2\partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11})\,(2\partial_2 g_{12} - \partial_1 g_{22})\right] \\ & -\frac{g_{11}}{4g^2}\left[(\partial_2 g_{22})\,(2\partial_1 g_{12} - \partial_2 g_{11}) - (\partial_1 g_{22})^2\right] \,. \end{aligned}$$

Dabei ist $g = \det(g)$ und $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.